
DM D'INFORMATIQUE N°1 : LA CONJECTURE DE SYRACUSE

À envoyer par mail au plus tard le lundi 13 novembre 23h59

Pour faire ce DM, renommez le fichier-réponse “VOTRENOM.py” avec votre nom en majuscules. Remplissez-le question par question.

On appelle suite de Syracuse une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ partant d'un entier $u_0 \in \mathbb{N}^*$ donné et définie récursivement de la manière suivante : pour tout $n \in \mathbb{N}$, si u_n est pair, alors $u_{n+1} = \frac{u_n}{2}$. Si en revanche u_n est impair, alors $u_{n+1} = 3u_n + 1$. La conjecture de Syracuse affirme que, quelle que soit la valeur de u_0 , la suite de Syracuse $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ finit par atteindre la valeur 1 après un nombre fini d'itérations (qui dépend de u_0). Après quoi, la suite prend les valeurs 4, 2, 1, 4, 2, 1, etc. indéfiniment.

Dans toute la suite, on supposera que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite de Syracuse.

1. Dans le fichier-réponse, compléter la fonction `syracuse` puis la tester. Par exemple, `syracuse(5)` doit retourner la liste `[5, 16, 8, 4, 2, 1]`.

Étant donné une valeur $u_0 \in \mathbb{N}^*$, on définit son temps de vol comme étant la plus petite valeur $m \in \mathbb{N}$ telle que $u_m = 1$.

2. Écrire une fonction `tempsVol` qui prend en argument un entier $u \in \mathbb{N}^*$ et retourne le temps de vol associé à u . Par exemple, `tempsVol(8)` doit retourner 3.
3. Écrire une fonction `comete` qui à un entier $N \in \mathbb{N}^*$ retourne une liste de tous les temps de vol associés aux entiers de 1 à N .

Petit détour étonnant : exécutez le script de la cellule suivante. Il permet d'afficher le graphe des valeurs de la liste `comete(N)` où N prend une valeur qu'on peut fixer arbitrairement (par défaut dix milles). Avec l'icône en forme de loupe, zoomez de sorte que l'axe des abscisses soit réduit à `[[6287, 6301]]` : quel temps de vol revient le plus souvent ?
Note : vous pouvez revenir à la vue initiale avec l'icône en forme de maison.

Étant donné une valeur $u_0 \in \mathbb{N}^*$, on définit son altitude comme étant la plus grande valeur de l'ensemble $\{u_0, u_1, \dots, u_m\}$, où m est le temps de vol associé à u_0 .

4. Écrire une fonction `altitude` qui à un entier $u \in \mathbb{N}^*$ retourne l'altitude de u . Par exemple, `altitude(3)` doit retourner 16.

Dans le cadre de ce DM, on dit qu'un entier $p \in \mathbb{N}^*$ est un entier record si le temps de vol de p est supérieur strictement à tous les temps de vol des entiers qui le précèdent. Par exemple, on peut obtenir le tableau suivant :

entier	1	2	3	4	5	6	7	8	9
temps de vol	0	1	7	2	5	8	16	3	19

On voit alors que les entiers en gras sont supérieurs à tous ceux qui les précèdent sur la même ligne. Ainsi les entiers correspondants sont des entiers records.

5. Écrire une fonction `record` qui à un entier $N \in \mathbb{N}^*$ retourne la liste de tous les entiers records de 1 à N inclus. Par exemple `record(9)` doit retourner la liste `[1, 2, 3, 6, 7, 9]`.
6. Quel est l'entier inférieur à 10 000 qui a le plus grand temps de vol ? On répondra directement dans le fichier-réponse, en justifiant avec un test approprié.